第 2 节 基本不等式的核心运用思想（★★★）

内容提要

用基本不等式求最值的关键是凑定值，有的题目定值较难凑出，本节将梳理一些凑定值的核心思想.

1．消元思想：若给出的等式容易反解出某个变量，则可考虑将其反解出来，代入求最值的目标式，消元后再进行分析.

2．齐次化思想：对于分式型最值问题，若分子分母不齐次，可考虑结合已知条件将分子分母齐次化，齐次化后，通过变形往往可凑出 $a\cdot\frac{x}{y}+b\cdot\frac{y}{x}$ 这种积为定值的形式.

3．统一结构思想：若所给的等式中已有求最值的部分，则考虑把其余部分也变成求最值的目标，统一结构，解出其范围.

典型例题

类型 I：消元思想

【例 1】已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b}$ 的最小值是_____.

解法 1： a，b 的关系式较简单，可反解出一个，代入目标式消元再看，

由 $ab=1$ 可得 $b=\frac{1}{a}$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b}=\frac{1}{a}+a+\frac{4}{a+\frac{1}{a}}\geq 2\sqrt{(a+\frac{1}{a})\cdot\frac{4}{a+\frac{1}{a}}}=4$，

当且仅当 $a+\frac{1}{a}=\frac{4}{a+\frac{1}{a}}$ 时取等号，结合 $a>0$ 可解得：$a=1$，此时 $b=1$，满足题意，故 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b})_{\min}=4$.

解法 2： 求和的最小值应凑积定，注意到分母为 $a+b$，所以分子也应有 $a+b$，故将前两项通分，

由题意，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b}=\frac{b+a}{ab}+\frac{4}{a+b}=a+b+\frac{4}{a+b}\geq 2\sqrt{(a+b)\cdot\frac{4}{a+b}}=4$，

当且仅当 $a+b=\frac{4}{a+b}$ 时取等号，结合 $ab=1$ 及 a，b 均为正数可得 $a=b=1$，所以 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b})_{\min}=4$.

答案： 4

【变式】（多选）已知 a，b，c 均为正实数，且 $ab+ac=2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}+\frac{8}{a+b+c}$ 的值不可能是（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解析： 应先求出目标式的范围，该式变量多，观察发现所给等式可提 a 反解出 $b+c$，代入目标消元，

由 $ab+ac=2$ 可得 $b+c=\frac{2}{a}$，代入 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}+\frac{8}{a+b+c}$ 可得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}+\frac{8}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}+\frac{8}{a+\frac{2}{a}}$，

上式看似复杂，但若提个 $\frac{1}{2}$，就出现积为定值了，$\frac{1}{a}+\frac{a}{2}+\frac{8}{a+\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}(\frac{2}{a}+a+\frac{16}{a+\frac{2}{a}})\geq\sqrt{(\frac{2}{a}+a)\cdot\frac{16}{a+\frac{2}{a}}}=4$，

取等条件是 $\frac{2}{a}+a=\frac{16}{a+\frac{2}{a}}$，结合 $a>0$ 可解得：$a=2\pm\sqrt{2}$，所以 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}+\frac{8}{a+b+c})_{\min}=4$.

答案：ABC

【反思】涉及多个变量，也可以尝试消元，若把本题的 $b+c$ 整体换成 b，就和例 1 差不多了.

【例 2】已知 $a>0$，$b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，则 $\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-2}$ 的最小值为_____.

解析：条件看似为“1”的代换，但尝试后发现不是，既然“积定”不易凑出，可反解出 b，消元再看，

由 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ 可得 $b=\frac{2a}{a-1}$，因为 $a>0$，$b>0$，所以 $a>1$，

$$\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-2}=\frac{a}{a-1}+\frac{\frac{2a}{a-1}}{\frac{2a}{a-1}-2}=\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{2a-2(a-1)}=\frac{a}{a-1}+a=\frac{(a-1)+1}{a-1}+a=1+\frac{1}{a-1}+a$$

$$=2+\frac{1}{a-1}+(a-1)\geq 2+2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot(a-1)}=4,$$

当且仅当 $\frac{1}{a-1}=a-1$ 时取等号，结合 $a>1$ 可得此时 $a=2$，所以 $\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-2}$ 的最小值为 4.

答案：4

【总结】当由已知等式容易反解出某个变量时，可尝试消元，看之后的式子是否便于处理. 但需注意，消元法不是万能的，有些问题消元后反而形式会更复杂，所以得考虑其他方法，例如下面的例 3.

类型 II：齐次化思想

【例 3】已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\frac{(x+1)(y+1)}{xy}$ 的最小值为_____.

解析：本题若由 $x+2y=1$ 反解出 x，并代入消元，可得到 $\frac{(x+1)(y+1)}{xy}=\frac{(2-2y)(y+1)}{(1-2y)y}$，能求最值，但稍麻烦，而我们发现目标式分子分母次数不统一，故可考虑将 1 换成 $x+2y$，使分子分母齐次化，

由题意，$\frac{(x+1)(y+1)}{xy}=\frac{(x+x+2y)(y+x+2y)}{xy}=\frac{2x^2+8xy+6y^2}{xy}=\frac{2x}{y}+\frac{6y}{x}+8\geq 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{6y}{x}}+8=4\sqrt{3}+8$，

取等条件是 $\frac{2x}{y}=\frac{6y}{x}$，结合 $x+2y=1$ 得 $x=2\sqrt{3}-3$，$y=2-\sqrt{3}$，所以 $(\frac{(x+1)(y+1)}{xy})_{\min}=4\sqrt{3}+8$.

答案：$4\sqrt{3}+8$

【反思】涉及分式的最小值，若分子分母不齐次，可考虑将其齐次化，看能否化简为 $a\cdot\frac{y}{x}+b\cdot\frac{x}{y}$ 这种形式，凑出积为定值，进而利用基本不等式求最值. 上一节的“1”的代换，本质上其实也是齐次化.

类型 III：统一结构思想

【例 4】若 x，y 满足 $x^2+y^2=1+xy$，则 x^2+y^2 的最大值是_____.

解析：所给等式中已有求最值的目标 x^2+y^2，故想办法将 xy 也变成 x^2+y^2，达到统一结构的目的，

由题意，$x^2+y^2=1+xy\le 1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$，整理得：$x^2+y^2\le 2$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，

结合 $x^2+y^2=1+xy$ 可得此时 $x=y=\pm1$，所以 x^2+y^2 的最大值是 2.

答案：2

【反思】①不等式 $x^2+y^2\ge 2xy$ 可沟通两项的平方和 x^2+y^2 与它们的乘积 xy；②若所给等式中已有求最值的结构，则可尝试用不等式将其余部分也变成该结构，从而求出最值.

【变式 1】已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=\sqrt{2ab+4}$，则 $a+2b$ 的最大值是（　　）

（A）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（C）3　　（D）4

解析：要求 $a+2b$ 的最大值，条件中有 $a+2b$，故若将剩下的 $2ab$ 也变成 $a+2b$，就统一了结构，

因为 $2ab=a\cdot 2b\le(\dfrac{a+2b}{2})^2$，所以 $a+2b=\sqrt{2ab+4}\le\sqrt{(\dfrac{a+2b}{2})^2+4}$，化简得：$a+2b\le\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

取等条件是 $a=2b$，结合 $a+2b=\sqrt{2ab+4}$ 可得此时 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $(a+2b)_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

答案：A

【变式 2】已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=5$，则 $a+b$ 的最小值为_____；最大值为_____.

解析：所给等式中已有求最值的目标 $a+b$，故想办法将 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 也化为 $a+b$，从而统一结构，

因为 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}$ 且 $ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{a+b}{(\dfrac{a+b}{2})^2}=\dfrac{4}{a+b}$，故 $5=a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge a+b+\dfrac{4}{a+b}$ ①，

将 $a+b$ 看作整体，由上述不等式可求出其范围，为了便于观察，换个元，

令 $t=a+b$，则不等式①即为 $5\ge t+\dfrac{4}{t}$，所以 $5t\ge t^2+4$，故 $(t-1)(t-4)\le 0$，解得：$1\le t\le 4$，

所以 $1\le a+b\le 4$，取等条件是 $a=b$，代入 $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=5$ 可求得 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=b=2$，

分别对应 $1\le a+b\le 4$ 的左、右两侧取等的情形，所以 $(a+b)_{\min}=1$，$(a+b)_{\max}=4$.

答案：1，4

【反思】不管所给等式怎样变化，核心都是寻求结构的统一，只要将所给等式化成关于求最值目标的不等式，就能解决问题.

强化训练

1.（2022•江苏连云港模拟•★★）已知$a>0$，$b>0$，$a+\frac{1}{b}=1$，则$\frac{b}{a}$的最小值为_____.

2.（★★）若$x>0$，$y>0$，且$x+2y=1$，则$\frac{xy}{2x+y}$的最大值为_____.

3.（2023•贵州模拟•★★）已知实数x，y满足$x^2-xy+y^2=2$，则x^2+y^2的最大值为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$2\sqrt{2}$　（D）4

4.（2023•重庆模拟•★★★）已知$x>0$，$y>0$，$xy+x-2y=4$，则$2x+y$的最小值是（　　）

（A）4　（B）5　（C）7　（D）9

5.（2020•江苏卷•★★★）已知$5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则$x^2+y^2$的最小值为_____.

6.（★★★）已知$x>0$，$y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，则$\frac{x^2}{x-1}+\frac{y}{y-4}$的最小值为_____.

7.（★★★）若$a>0$，$b>0$，且$ab=2a+b+16$，则ab的最小值为_____.

8.（2023•湖北模拟•★★★）若正数x，y满足$x+2y=2$，则$\frac{y^2+x}{xy}$的最小值为_____.

9．（2023·湖北武汉模拟·★★★）已知 $x>0$， $y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $2x+y+\frac{2y}{x}$ 的最小值为_____.

10．（★★★）已知 a，b，c 均为正数，且 $abc=4(a+b)$，则 $a+b+c$ 的最小值为_____.